УДК 517.929

© *А. С. Ларионов, И. А. Кузнецова*

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Предлагаются утверждения о существовании решений начальной и краевой задач для нелинейного функционально-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, оператор, запаздывание, задача Коши, разрешимость, математическая модель.

Рассматривается задача Коши

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - p(t)\dot{x}_g(t) + q(t)x(t) = f\big(t, x(t), x_h(t)\big), \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$x(0) = \alpha, \quad \alpha \in R, \tag{2}$$

где обозначено

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t) \in [0,\infty), \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0,\infty), \end{cases}$$

$$\dot{x}_g(t) = \begin{cases} \dot{x}[g(t)], & \text{если } g(t) \in [0,\infty), \\ 0, & \text{если } g(t) \notin [0,\infty), \end{cases}$$

в предположениях: $p \in L_\infty[0,\infty)$ $\big(L_\infty[0,\infty)$ — пространство функций $z\colon [0,\infty) \to R$ измеримых и ограниченных в существенном на $[0,\infty)\big)$, $p > 0$; $q \in L_p[0,\infty)$ $\big(L_p[0,\infty)$ — пространство функций $z\colon [0,\infty) \to R$ локально суммируемых со степенью p, $1 \leqslant p < \infty$ на каждом конечном отрезке $[0,\ b] \subset [0,\infty)\big)$; g, h — измеримые функции, $g(t) \leqslant t$, $h(t) \leqslant t$ при почти всех $t \in [0,\infty)$; функция f удовлетворяет условиям Каратеодори.

Для v, $z \in L_\infty[0,\infty)$ обозначим $[v,z] = \{x \in L_\infty \colon v \leqslant x \leqslant z\}$.

Будем говорить, что функция $f(t,u_1,u_2)$ удовлетворяет условию $L^1[v,z]$ $(L^2[v,z])$ (см., например, [1]), если существуют такие функции $r_i^1 \in L_p$ $(r_i^2 \in L_p)$, $i = 1,2$, что оператор

$$M^1\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) = f\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) + r_1^1(t)u_1(t) + r_2^1(t)u_2(t)$$
$$\Big(M^2\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) = f\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) + r_1^2(t)u_1(t) + r_2^2(t)u_2(t)\Big)$$

является изотонным (антитонным).

Справедливы следующие утверждения о разрешимости задачи (1), (2).

Т е о р е м а 1. *Пусть $p < 1$ и существуют такие функции v, $z \in L_\infty$, что $v \leqslant z$ и выполняются неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t) \leqslant f\big(t, v(t), v_h(t)\big), \quad (\mathcal{L}z)(t) \geqslant f\big(t, z(t), z_h(t)\big),$$
$$v(0) \leqslant \alpha \leqslant z(0).$$

Пусть, далее, функция f удовлетворяет условию $L^1[v,z]$ с такими коэффициентами $r_i^1(t)$, $i = 1,2$, что функция Коши уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t) + r_1^1(t)x(t) + r_2^1(t)x_h(t) = \eta_1(t)$$

положительна в области $\Delta = \{(t,s)\colon 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$. Тогда существует решение x задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$v \leqslant x \leqslant z.$$

Если, кроме того, функция f удовлетворяет условию $L^2[v,z]$ с такими коэффициентами $r_i^2(t)$, $i=1,2$, что функция Коши уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t)+r_1^2(t)x(t)+r_2^2(t)x_h(t)=\eta_2(t)$$

положительна в области Δ, то это решение единственно.

Т е о р е м а 2. *Пусть $p<1$ и существуют такие функции v, $z\in L_\infty$, что $v\leqslant z$ и выполняются неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t)\leqslant f\big(t,z(t),z_h(t)\big),\quad (\mathcal{L}z)(t)\geqslant f\big(t,v(t),v_h(t)\big),$$
$$v(0)\leqslant\alpha\leqslant z(0).$$

Пусть, далее, функция f удовлетворяет условию $L^2[v,z]$ с такими коэффициентами $r_i^2(t)$, $i=1,2$, что функция Коши уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t)+r_1^2(t)x(t)+r_2^2(t)x_h(t)=\eta_2(t)$$

положительна в области Δ . Тогда существует решение x задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$v\leqslant x\leqslant z.$$

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (1) при $p=0$, $q(t)=q=\mathrm{const}$, $f\big(t,x(t),x_h(t)\big)=\sin x(t-\tau)$, $\tau>0$ является [2] математической моделью динамики основных производственных фондов на предприятиях.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 361 с.
2. Кундышева Е.С. Математическое моделирование в экономике: Учебное пособие. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2006. 352 с.

Поступила в редакцию 11.02.2012

A. S. Larionov, I. A. Kuznetsova

The solvability of nonlinear problems for a differential equation with retarded argument

The statements about the existence of solutions of the initial and boundary value problems for nonlinear functional-differential equations are offered.

Keywords: differential equation, operator, delay, Cauchy's problem, solvability, mathematical model.

Mathematical Subject Classifications: 34K10, 34K40, 34K60

Ларионов Александр Степанович, к.ф.-м.н., доцент, Братский государственный университет, 665709, Россия, г. Братск, ул. Макаренко, 40. E-mail: larios84@yandex.ru

Кузнецова Ирина Андреевна, аспирант, кафедра математики, Братский государственный университет, 665709, Россия, г. Братск, ул. Макаренко, 40. E-mail: ipa_Q@mail.ru

Larionov Aleksandr Stepanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Bratsk State University, ul. Makarenko, 40, Bratsk, 665709, Russia

Kuznetsova Irina Andreevna, post-graduate student, Department of Mathematics, Bratsk State University, ul. Makarenko, 40, Bratsk, 665709, Russia